Практическое занятие. Тема 15

Приложения определенного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур

Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями, уравнения которых заданы в прямоугольных декартовых, и полярных системах координат могут быть применены формулы соответственно

$$S = \int_a^b (y_2 - y_1)dx \tag{1.1}$$

или

$$S = \int_c^d (x_2 - x_1)dy \tag{1.2}$$

и

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\rho_2^2 - \rho_1^2\right)d\varphi \tag{1.3}$$

2. Вычисление длины дуги кривой.

Для решения длины дуги плоской кривой, заданной различными уравнениями применяются формулы

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{2.1}$$

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt. \tag{2.2}$$

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi. \tag{2.3}$$

Вычисление объемов тел.

Объем тела вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x)dx \tag{3.1}$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^2 - 2x$, прямыми $x = -1$, $x = 1$ и осью Ox.

►В начале построим фигуру, ограниченную данными линиями (рис.1). Искомая площадь $S = |S_1| + |S_2| = S_1 - S_2$, поэтому

$$S = \int_{-1}^{0}\left(x^2 - 2x\right)dx - \int_{0}^{1}\left(x^2 - 2x\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0} - \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{0}^{1} = \left(\frac{1}{3} - 1\right) = 2. \blacktriangleleft$$

В более общем случае, когда данная фигура ограничена двумя кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и двумя вертикальными прямыми $x = 1$, $y = b$, причем $f_1(x) \le f_2(x)$, $x \in [a;b]$, имеем (рис. 2)

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y=3x-x^2$ и $y=-x$.

►Находим точки пересечения данных кривых и строим искомую фигуру (рис. 3):

$$\left.\begin{aligned} y&=3x-x^2 \\ y&=-x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y=-x \\ -x=3x-x^2. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, получаем: $x_1=0,\quad x_2=4,\quad y_1=0,\quad y_2=-4$.

Следовательно, согласно формуле (1.1), имеем:

$$S=\int_0^4 \left(3x-x^2-(-x)\right)dx=\int_0^4 \left(4x-x^2\right)dx=\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4=\frac{32}{3}. ◄$$

Если кривая AB, ограничивающая криволинейную трапецию (рис. 4), задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то площадь криволинейной трапеции

$$S=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt, \qquad (1.4)$$

где α и β определяются из уравнений $\varphi(\alpha)=a$ и $\psi(\beta)=b$ ($\psi(t)\geq 0$ на отрезке $[\alpha;\beta]$).

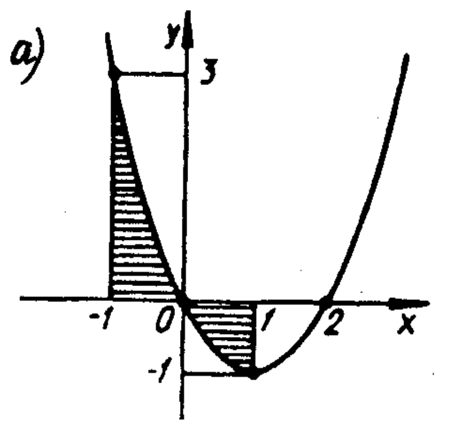

Рис.1

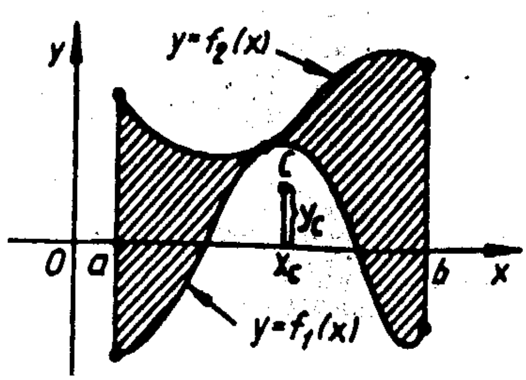

Рис.2

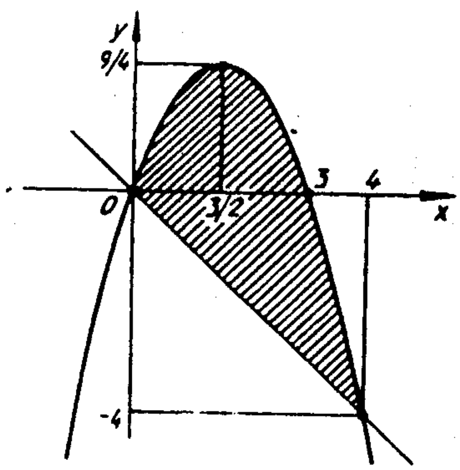

Рис.3

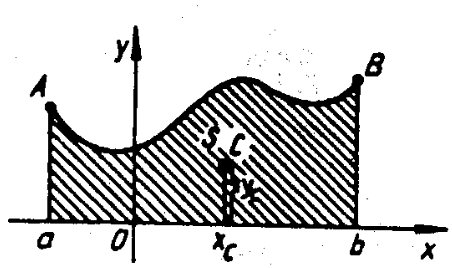

Рис.4

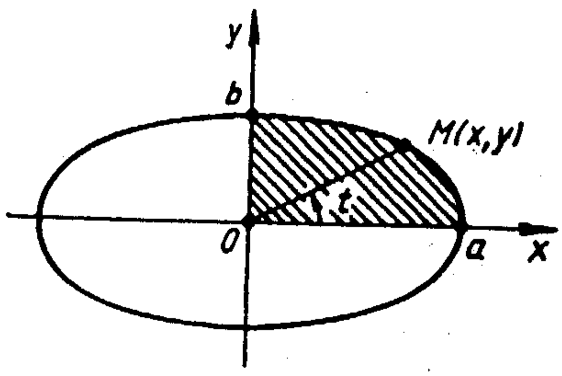

Рис.5

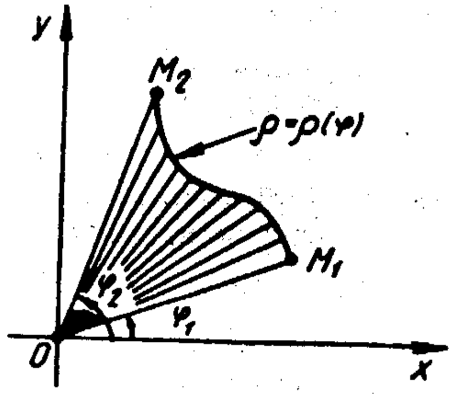

Рис.6

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

►Запишем параметрические уравнения эллипса: $x = a\cos t,\quad y = b\sin t$. С учетом свойств симметрии фигуры и формулы (1.4) получаем (рис. 5):

$$S = 4\int_0^a y dy = 4\int_{\pi/2}^{0} a\sin t(-b\sin t)dt = 4ab\int_0^{\pi/2}\sin^2 t dt = 4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = 2ab\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$
$$= \pi ab. ◄$$

В случае, когда непрерывная кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, площадь криволинейного сектора OM_1M_2 (рис. 6), ограниченного другой кривой и двумя полярными радиусами OM_1 и OM_2, соответствующими значениям φ_1 и φ_2 полярного угла, выражается интегралом

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\rho(\varphi)\right)^2 d\varphi. \tag{1.4}$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right)$.

►Запишем уравнение данной кривой в полярных координатах. Для этого заменим $x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi$. Получим $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ или $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

С учетом симметрии фигуры искомая площадь S может быть вычислена по формуле (1.4)

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}a^2\cos 2\varphi d\varphi = 2a^2\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/2} = a^2. ◄$$

Пример 5. Вычислить длину дуги кривой $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, абсциссы концов которой $x_1 = \sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{8}$.

►Согласно формуле (2.1) имеем:

$$l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+(x)^2}dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+x}dx = \frac{(1+x)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} = \frac{34}{3}. ◄$$

Пример 6. Вычислить длину одной арки циклоиды

$y = a(1-\cos t), \quad x = a(t-\sin t).$

►Поскольку все арки циклоиды одинаковы, рассмотрим первую ее арку, вдоль которой параметр t изменяется от 0 до 2π. Тогда, согласно формуле (2.2), имеем:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a. ◄$$

Пример 7. Вычислить длину первого витка логарифмической спирали $\rho = e^{\varphi}$.

►Из формулы (2.3) следует, что

$$l = \int_0^{2\pi}\sqrt{e^{2\varphi}+e^{2\varphi}}\,d\varphi t = \int_0^{2\pi}\sqrt{2}e^{\varphi}d\varphi = \sqrt{2}e^{\varphi}\Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2}\left(e^{2\pi}-1\right) \approx 108{,}16. ◄$$

Пример 8. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

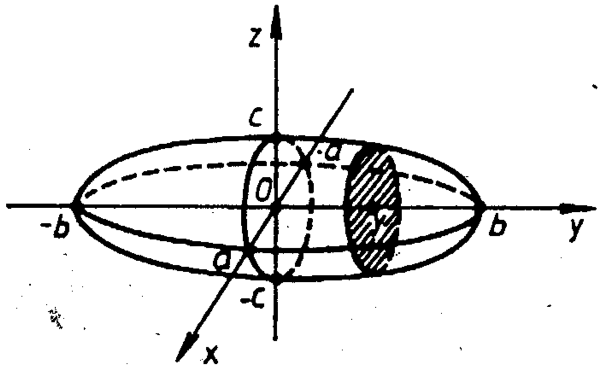

Рис. 7

►По данному уравнению строим эллипсоид (рис. 7). Рассмотрим сечения эллипсоида плоскостями, перпендикулярными к оси Oy и проходящими через произвольную точку $y \in [-b; b]$. В сечении с поверхностью получим кривые

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2} = 1-\frac{y^2}{b^2}, \quad y = const,$$

или, если $1 - y^2/b^2 > 0$,

$$\frac{x^2}{a\left(\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{c\left(\sqrt{1-\frac{y^3}{b^2}}\right)^2} = 1, \quad y = const,$$

т.е. эллипсы с полуосями $a_1 = a\sqrt{1-y^2/b^2}, \quad c_1 = c\sqrt{1-y^2/b^2}$. Площади этих сечений

$$S(y) = \pi a_1 c_1 = \pi ac\left(1-y^2/b^2\right).$$

Тогда из формулы (3.1) следует, что

$$V = \int_{-b}^{b}\pi ac\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy = 2\pi ac\int_0^b\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy = 2\pi ac\left(y-\frac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_0^b = \frac{4}{3}\pi abc. ◄$$

Аудиторное занятие

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9x, \quad y = 3x$. $(Ответ: 0{,}5.)$
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x, \quad y = x + 4$. $(Ответ: 0{,}5.)$
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 1/(1 + x^2), \quad y = x^2/2$. $(Ответ: \pi/2 - 1/3.)$
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой линией $y^2 = x^2 - x^4$. $(Ответ: 4/3.)$
5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $y = a(1 - \cos t), \quad x = a(t - \sin t)$ и осью Ox. $(Ответ: 3\pi a^2.)$
6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлей линии $x = 3t^2, \quad y = 3t - t^3$. $(Ответ: 72\sqrt{3}/5.)$
7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y = xe^{-x^2/2}$ и ее асимптотой. $(Ответ: 0{,}5.)$
8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 - \cos\chi)$. $(Ответ: 3\pi a^2/2.)$
9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 9, \quad y = x, \quad y = -x/\sqrt{3}$. $(Ответ: 25\pi/24.)$

Аудиторное задание

10. Вычислить длину дуги параболы $y = 2\sqrt{x}$ между точками с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. $\left(Ответ: \sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \approx 2{,}29.\right)$
11. Вычислить длину астроиды $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$. $(Ответ: 6a.)$
12. Вычислить длину кардиоиды $\rho = a(1 - \cos\varphi)$. $(Ответ: 8a.)$
13. Вычислить длину дуги кривой $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ от точки с абсциссой $x_1 = 1$ до точки с абсциссой $x_2 = 9$. $(Ответ: 52/3.)$
14. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2}, \quad z = 1$. $(Ответ: \pi\sqrt{2}.)$
15. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y = x^2, \quad x = y^2$. $(Ответ: 3\pi/10.)$
16. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox. $(Ответ: 5a^2\pi^2.)$
17. Вычислить площадь поверхности вращения, полученной при вращении вокруг оси Ox дуги кривой $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{4x - 1}$ от точки $x_1 = 1$ до точки $x_2 = 9$. $(Ответ: 104\pi/3.)$

Домашнее задание

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
   а) $y^2 = x + 5, \quad y^2 = -x + 4$; б) $\rho = a\cos 2\varphi$. $(Ответ: а)\ 9\sqrt{2}\ ;\quad б)\ \pi a^2/2.)$
2. Вычислить площадь фигуры:

а) ограниченной линиями $y=(x-4)^2, \quad y=16-x^2$;

б) заключенной между первым и вторым витками спирали Архимеда $\rho = a\varphi \quad (a>0)$. $\left(Ответ: а)\ 64/3; \qquad б)\ 8\pi^3 a^2.\right)$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $4y=8x-x^2, \quad 4y=x+6$,

б) $y=4t^2-6t, \quad x=2t$ и осью Ox. $\left(Ответ: а)\ \frac{49}{24} \approx 2{,}04; \qquad б)\ 9/2.\right)$

4. Вычислить длину дуги кривой $y=\frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}$ между точками M_1 и M_2 с абсциссами $x_1=2$ и $x_2=8$. $\left(Ответ: 56/3.\right)$

5. Найти поверхности вращения, полученной при вращении отрезка прямой $y=3x$, заключенного между точками с абсциссами $x_1=0$ и $x_2=2$, вокруг оси Ox. $\left(Ответ: 12\sqrt{10}\pi.\right)$

6. Вычислить длину дуги кривой $y=\frac{4}{3}x$, заключенной между точками с абсциссами $x_1=2$ и $x_2=5$. $\left(Ответ: 5.\right)$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y=\frac{x^2}{1}+\frac{z^2}{4}, \quad y=1.$ $\left(Ответ: \pi.\right)$

8. Найти длину дуги кривой $y=\ln x$ между точками с абсциссами $x_1=\sqrt{3}$ и $x_2=\sqrt{8}$. $\left(Ответ: 1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\approx 1{,}2.\right)$

18. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y=2x-x^2$ и $y=0$. $\left(Ответ: \frac{16}{15}\pi.\right)$